

*zasada Hamiltona, równanie Euler–Lagrange’a,  
napęd asynchroniczny, długie elementy sprężyste linii wału*

Andriy CZABAN\*, Marek LIS\*\*

## **MODEL MATEMATYCZNY I ANALIZA UKŁADU NAPĘDOWEGO SILNIKA INDUKCYJNEGO Z DŁUGIM ELEMENTEM SPRĘŻYSTYM DLA PARAMETRÓW ROZŁOŻONYCH**

W pracy przedstawiono analizę układu napędowego silnika indukcyjnego z długim elementem sprężystym. Element sprężysty przedstawiono jako układ o parametrach rozłożonych. Równania różniczkowe stanu elektromechanicznego przedstawione w postaci normalnej Cauchy’ego. Wyniki symulacji komputerowych są wykorzystane dla analizy prędkości kątowych maszyny asynchronicznej i różnych punktów linii wału a także analizy prądów, momentów rozruchowych oraz momentów sprężystych, które wynikają z linii wału napędu.

### 1. WSTĘP

Budowa i analiza modeli matematycznych napędów elektrycznych są jednymi z najbardziej podstawowych problemów elektrotechniki stosowanej. Jest oczywistym, że efektywnie opisać takie modele można wyłącznie drogą połączenia elektrycznego i mechanicznego podukładów [1]. Takie połączenie jest możliwe na dwa sposoby. Pierwszy sposób polega w dekompozycji jednolitego układu elektromechanicznego na podstawie zasady zachowania energii, a drugi sposób – w bezpośrednim budowaniu modeli na podstawie podejść wariacyjnych [1, 3]. W zależności od typu zadania wykorzystywana jest jedna z wymienionych zasad. W niniejszej pracy zaproponowano podejście pierwsze. Podzielono układ elektromechaniczny na dwa odrębne podukłady – elektryczny i mechaniczny. Dla każdego z tych podukładów zapisano równania stanu na podstawie podstawowych praw fizyki. Połączenia wymienionych podukładów przeprowadzono przez równanie równowagi momentów elektrycznych i mechanicznych [4].

---

\* Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny, Politechnika Lwowska, Katedra Mechaniki.

\*\* Wydział Elektryczny, Politechnika Częstochowska.

Matematyczny model silnika asynchronicznego reprezentowany jest przez równania obwodów elektromagnetycznych dla stojana i wirnika [1], a model części mechanicznej przez równanie drgań skrętnych linii wału o rozłożonych parametrach mechanicznych. [5]

## 2. MODEL MATEMATYCZNY

Równania stanu elektromagnetycznego silnika opisują zależności [1]:

$$\frac{di_S}{dt} = A_S(u_S - R_S i_S) + A_{SR}\Pi(-\Omega\Psi_R - R_R i_R) \quad (1)$$

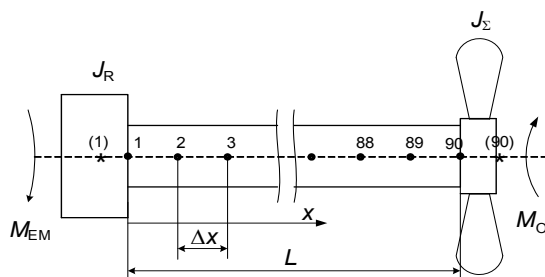
$$\frac{di_R}{dt} = \Pi^{-1}A_{RS}(u_S - R_S i_S) + \Pi^{-1}A_{SR}\Pi(-\Omega\Psi_R - R_R i_R) + \Omega i_R \quad (2)$$

$$\Pi = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{array}{|c|c|} \hline \sin(\gamma + 2\pi/3) & -\sin\gamma \\ \hline \sin\gamma & -\sin(\gamma - 2\pi/3) \\ \hline \end{array} \quad (3)$$

$$M_E = \sqrt{3}p_0(i_{RA}^{\Pi}i_{SB}^{\Pi} - i_{RB}^{\Pi}i_{SA}^{\Pi})/\tau \quad (4)$$

$p_0$  – liczba par biegunów;  $\omega$  – prędkość obrotu wirnika.

Model matematyczny procesów mechanicznych we wspomnianym układzie analizowano rozpatrując długą sprężystą linię wału, do końców której przyłożono z jednej strony moment elektromagnetyczny silnika napędowego, a z drugiej moment obciążenia określony dowolną funkcją (patrz rys. 1).



Rys. 1. Schemat analizowanego napędu  
Fig. 1. The diagram of the analyzed drive

Równanie opisujące procesy mechaniczne w długim sprężystym wale przedstawia zależność: [1, 2]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\xi}{\rho J_p} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial t} \quad (5)$$

gdzie  $G$  – moduł prężności poprzecznej;  $\xi$  – współczynnik rozproszenia wewnętrznego w linii wału;  $x$  – bieżąca współrzędna wzdłuż linii wału;  $\rho$  – gęstość materiału wału;  $J_p$  – biegunowy moment bezwładności linii wału.

Schemat obliczeniowy dyskretyzacji linii wału przedstawiono na rys. 1.

Zależność (5) przyjmuje rzeczywisty sens tylko w przypadku zadania warunków brzegowych oraz początkowych. Warunki brzegowe wynikają z zasady D’Alamberta, tj. z równań równowagi momentów na granicach wału [1, 2, 4]. Tak, dla lewej i prawej granicy warunki brzegowe określone są zależnościami (6) i (7):

$$J_R \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - G J_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \xi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = M_E \quad (6)$$

$$-J_\Sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + G J_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \xi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = M_O \quad (7)$$

Metodami rozwiązania podobnych zadań są metody elementów skończonych i różnic skończonych. W tym przypadku wykorzystano metodę różnic skończonych w sensie metody prostych tzn., że pochodne przestrzenne dyskretyzujemy metodą prostych, i dalej zwyczajnie dyskretyzowane równania całkujemy metodami Runge–Kutta.

Dyskretyzowane równanie (5) ze względu na rys. 1 określone jest zależnością:

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \equiv \frac{\partial \omega_i}{\partial t} = \frac{G}{\rho} \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\xi}{\rho J_p} \frac{\omega_{i-1} - 2\omega_i + \omega_{i+1}}{(\Delta x)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, 90. \quad (8)$$

Rozwiązując razem wyrażenia (6)–(8), otrzymano komplet równań opisujących część mechaniczną:

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{2(M_E \Delta x - J_p G (\varphi_1 - \varphi_2) - \xi (\omega_1 - \omega_2))}{(J_p \rho \Delta x + 2J_R) \Delta x}, \quad (9)$$

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{G}{\rho} \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\xi}{\rho J_p} \frac{\omega_{i-1} - 2\omega_i + \omega_{i+1}}{(\Delta x)^2}, \quad i = 2, 3, \dots, 89. \quad (10)$$

$$\frac{d\omega_{90}}{dt} = \frac{2(-M_O \Delta x + J_p G (\varphi_{89} - \varphi_{90}) + \xi (\omega_{89} - \omega_{90}))}{(J_p \rho \Delta x + 2J_R) \Delta x}. \quad (11)$$

Moment obciążenia opisano funkcję aproksymacyjną opisaną zależnością:

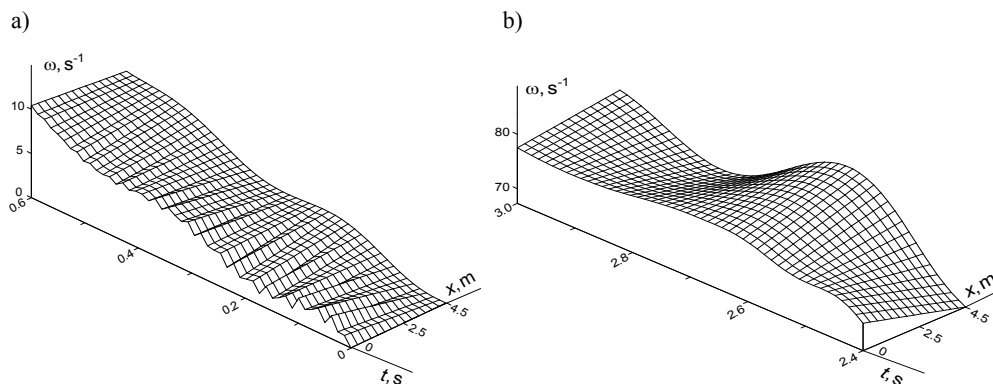
$$M_O = 2,257\omega + 7,4 \cdot 10^5 \omega^3 + 1,1 \cdot 10^{11} \omega^5 \quad (12)$$

Połączenia modeli matematycznych podukładów elektrycznych i mechanicznych rozpatrywanych powyżej przedstawia kompleksowy model analizowanego układu napędowego.

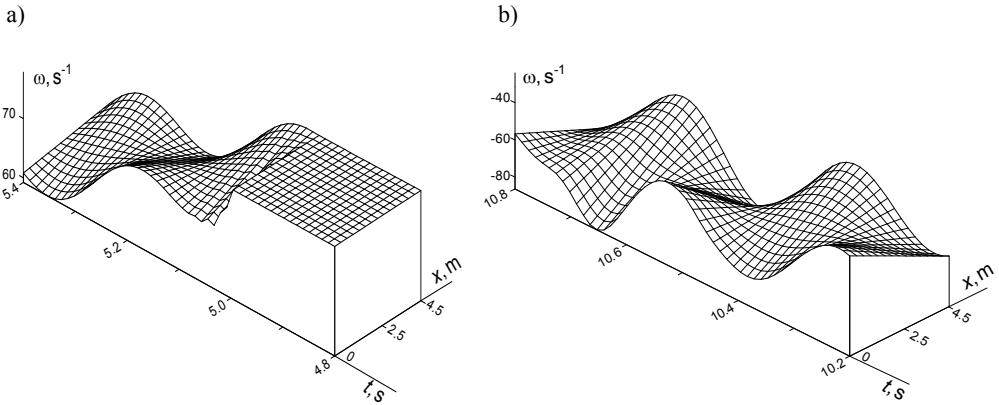
## 2. WYNIKI SYMULACJI KOMPUTEROWYCH

Dla analizy elektromechanicznych procesów przejściowych wykorzystano następujący układ: silnik asynchroniczny przez długi wał sprężysto-dyssypacyjny obraca element wykonawczy o zadanej charakterystyce obciążenia. Silnik asynchroniczny o danych  $P_N = 320$  kW;  $U_N = 6$  kV;  $I_N = 39$  A;  $\omega_N = 740$  s<sup>-1</sup>,  $p_0 = 4$ ,  $J_R = 49$  kg·m<sup>2</sup>,  $R_S = 1,27$  Ω,  $R_R = 1,31$  Ω,  $\alpha_S = 38,9$  H<sup>-1</sup>,  $\alpha_R = 35,7$  H<sup>-1</sup>. Krzywa magnesowania silnika dana w postaci:  $\psi_m = 12,4 \arctg(0,066i_m)$ . Parametry długiego wału:  $G = 8,1 \cdot 10^{10}$  N·m,  $\rho = 7859$  kg/m<sup>3</sup>,  $d = 0,05$  m,  $L = 4,45$  m,  $\xi = 0,5$  N·m<sup>2</sup>·s,  $\Delta x = 0,05$  m.  $J_\Sigma = 50$  kg·m<sup>2</sup>. Przyjęto dwa przypadki obliczeniowe. W pierwszym poddano analizie procesy przejściowe napędu asynchronicznego podczas rozruchu. W drugim analizowano procesy przejściowe napędu podczas nawrotu.

Na rysunkach 2 i 3 pokazano przestrzenno-czasowy rozkład prędkości obrotowej węzłów dyskretyzacji sprężystego wału w różnych zakresach czasu dla rozruchu i nawrotu. Wymienione rysunki pokazują prędkości wszystkich punktów dyskretyzacji długiej sprężystej linii wału.

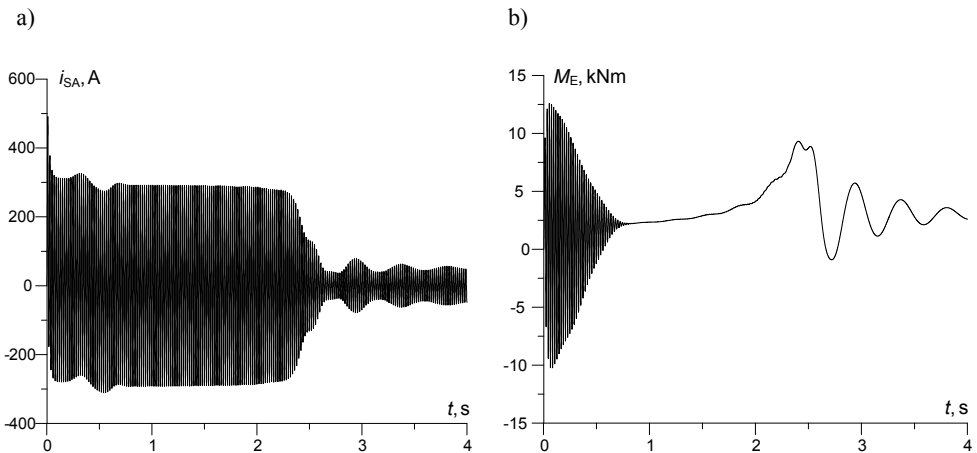


Rys. 2. Przestrzenno-czasowy rozkład prędkości obrotowej węzłów dyskretyzacji sprężystego wału w zakresie czasu  $t \in [0; 0,6]$  s (a),  $t \in [4,8; 5,4]$  s (b) dla rozruchu  
 Fig. 2. The distribution in space and time of the rotational speed for discrete pairs of the elastic shaft in time intervals  $t \in [0; 0,6]$  s (a),  $t \in [4,8; 5,4]$  s (b) during starting the motor

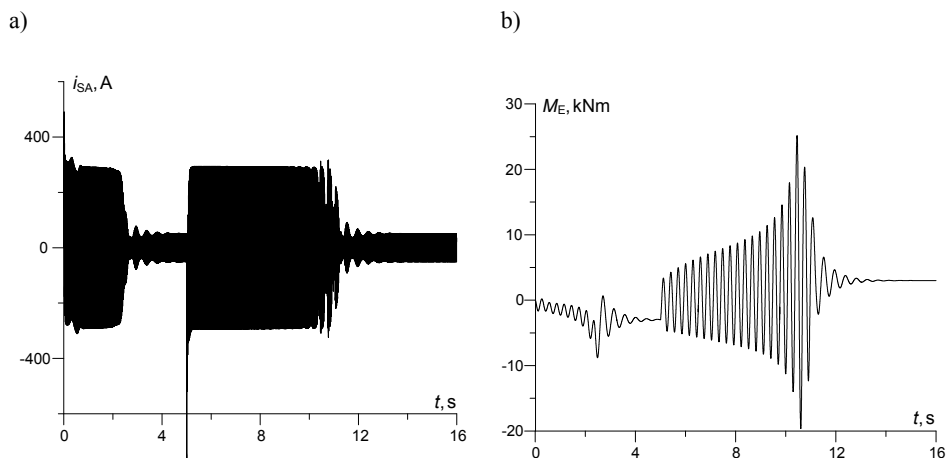


Rys. 3. Przestrzenno-czasowy rozkład prędkości obrotowej węzłów dyskretyzacji sprężystego wału w zakresie czasu  $t \in [4,8; 5,4]$  s (a),  $t \in [10,2; 10,8]$  s (b) dla nawrotu  
 Fig. 3. The distribution in space and time of the rotational speed for discrete pairs of the elastic shaft in time intervals  $t \in [4,8; 5,4]$  s (a),  $t \in [10,2; 10,8]$  s (b) during reversing the motor

Rysunki 4 i 5 przedstawiają przebiegi czasowe prądu w uzwojeniu fazy *A* i momentów elektromagnetycznego i sprężystości podczas rozruchu układu napędowego i pracy nawrotnej. Widać tu istotny wpływ fali sprężystej na wielkość oscylacji prądu i momentu w węzłach analizowanego układu.



Rys. 4. Przebiegi czasowe prądu i momentu elektromagnetycznego silnika dla rozruchu  
 Fig. 4. The current and electromagnetic torque of the started motor versus time



Rys. 5. Przebiegi czasowe prądu i momentu sprężystości między węzłami nr 1 i nr 2 dla nawrotu Fig. 5. The current and elastic moment between kinematic pairs No. 1 and No. 2 of reversed motor versus time

### 3. WNIOSKI

Z wyników przeprowadzonych obliczeń można wyciągnąć następujące wnioski:

- modelowanie matematyczne i analiza procesów przejściowych w skomplikowanych układach elektromechanicznych, w których występują długie połączenia sprężyste należy prowadzić na podstawie równań o rozłożonych parametrach mechanicznych, ze względu na ich dokładność,
- procesy oscylacyjne w części mechanicznej, które występują podczas rozruchu i nawrotu w istotnej mierze wpływają na procesy elektryczne w silniku napędowym, co potwierdza koncepcję elektromechanicznego przetwarzania energii.

### LITERATURA

- [1] CHABAN A., *Modelowanie matematyczne procesów oscylacyjnych systemów elektromechanicznych*, (w języku ukraińskim), wydanie drugie, zmienione i uzupełnione, W-wo T. Soroki, Lwów 2008.
- [2] RUSEK A., CZABAN A., LIS M., *Modelowanie matematyczne procesów oscylacyjnych w linii wałów o parametrach rozłożonych*, Technical News, 2011/1(33), 2(34), 66–68.
- [3] ORTEGA R., LORIA A., NICKLASSON P.J., SIRA-RAMIREZ H., *Passivity-Based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications*, Springer Verlag, London 1998.
- [4] TIMOSZENKO S., YOUNG D., WEAVER W., *Drgania w sprawie inżynierowej*, (w języku rosyjskim), Maszynoznawstwo, Moskwa 1985.
- [5] ZIEMIŃSKI R., *Analiza drgań swobodnych pełnego układu dyskretno-ciągłego*, Zesz. Nauk. A.G.H., 1980, No. 775, 177–188.

MATHEMATICAL MODEL AND ANALYSIS OF THE INDUCTION MOTOR  
WITH A LONG ELASTIC ELEMENT CONSIDERING DISTRIBUTED PARAMETERS

In the paper the analysis of the induction motor with a long elastic element is presented. The elastic element is considered as a system with distributed parameters. The differential equations of an electro-mechanical state are presented as the Cauchy's standard form. The results of computer simulations are used in order to analyze the angular velocities of an asynchronous machine and various points of the shaft lines as well as in order to analyze currents, starting torques and elastic moments occurring in the line of the drive shafts.